



Guía de Estudio para el examen de Admisión ITSC (Matemáticas)





Presentación

La guía de estudios para el examen de admisión al Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco (ITSC), presenta material de apoyo a los estudiantes que realizarán el examen de admisión de nuevo ingreso a nuestra casa de estudios, con el fin de fortalecer conocimientos adquiridos y ayuden a reforzar temas de interés de estudios de nivel medio superior; para un mejor desempeño en la realización del examen.

Además de ayudar al estudiante a desarrollar un pensamiento lógico y formal, para un nuevo enfoque, con respecto a desarrollarse en su aprendizaje a un nuevo nivel académico que es el nivel superior. El contenido de esta guía es completo en cuanto a los temas necesarios para su preparación hacia el examen de admisión, tomando en cuenta la experiencia en la enseñanza-aprendizaje de los docentes autores de la misma.

La presente guía fue diseñada por los docentes de la Academia de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco (ITSC).



Contenido

Presentación	2
Operaciones con Fracciones	4
Teoría de Exponentes y Radicales.....	5
Radicales	6
Raíz Cuadrada De Un Número.....	7
Raíz Cúbica De Un Número.....	7
Raíz Enésima De Un Número	7
Exponentes Racionales.....	7
Propiedades De Los Radicales	7
Operaciones algebraicas fundamentales	8
Suma y resta de polinomios y combinaciones de estas operaciones.....	9
Multiplicación de monomios por polinomios	9
Productos y cocientes notables	13
Factorización	16
Ecuaciones Lineales y Cuadráticas.....	16
Funciones Algebraicas y Trascendentes.....	28
Funciones Trigonométricas.....	33
Identidades Trigonométricas	43
Bibliografía	45





Operaciones con Fracciones

Sean a, b, c y d números reales

1. La suma de fracciones se define como

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

2. La resta de fracciones se define como

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

3. La multiplicación o producto de fracciones se define como

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

4. La división o cociente de fracciones se define como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Recomendaciones generales para operar aritméticamente con fracciones.

- Se simplifica las fracciones dadas si es posible.
- Se reducen las fracciones dadas al mínimo común denominador, si son de distintos denominadores.
- Se efectúan las multiplicaciones indicadas.
- Se suman los numeradores de las fracciones que resulten y se parte esta suma por el denominador común.
- Se reduce términos semejantes en el numerador.
- Se simplifica la fracción que resulte.

Ejemplo

Simplificar

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{x-2}{4} + \frac{3x+2}{6} &= \frac{(x-2)6 + 4(3x+2)}{24} = \frac{(6x-12) + (12x+8)}{24} = \frac{6x-12+12x+8}{24} = \frac{18x-4}{24} = \frac{2(9x-2)}{2(12)} = \\ &= \frac{(9x-2)}{12} = \frac{9x-2}{12} \blacksquare \\ \text{b. } \frac{2}{5a^2} + \frac{1}{3ab} &= \frac{(2)(3ab) + (5a^2)(1)}{(5a^2)(3ab)} = \frac{6ab+5a^2}{15a^3b} = \frac{a(6b+5a)}{a(15a^2b)} = \frac{(6b+5a)}{(15a^2b)} = \frac{5a+6b}{15a^2b} \blacksquare \end{aligned}$$

Resolver

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{a-2b}{15a} + \frac{b-a}{20b} &= \frac{-3a^2+7ab-8b^2}{60ab} \blacksquare \\ \text{b. } \frac{a+3b}{3ab} + \frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2} &= \frac{8a+3b}{15ab} \\ \text{c. } \frac{a-1}{3} + \frac{2a}{6} + \frac{3a+4}{12} &= \frac{11a}{12} \end{aligned}$$





d. $\frac{n}{m^2} + \frac{3}{mn} + \frac{2}{m} = \frac{n^2+3m+2nm}{m^2n}$

Teoría de Exponentes y Radicales

Si $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces a^n , es igual al producto de n veces el número real a tomado como factor, es decir $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$.

Ejemplos:

$$(5)^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$(-1)^5 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = -1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

Propiedades De La Potenciación

- **Producto de potencias de igual base:** el producto de potencias de igual base, es otra potencia de la misma base y de exponente igual a la suma de los exponentes de los términos factores.

Simbólicamente: $a^m a^n = a^{m+n}$

Ejemplo:

$$3^8 \times 3^{10} \times 3^2 = 3^{20}$$

- **Cociente de potencias de igual base:** El cociente de dos potencias de igual base, es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es igual a la resta de los exponentes del término dividendo menos el del divisor.

Simbólicamente $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, con $a \neq 0$ y $m > n$

Ejemplo: $\frac{5^{12}}{5^3} = 5^{12-3} = 5^9$

- **Potencia de una potencia:** La potencia de una potencia es otra potencia de la misma base y de exponente igual al producto de los exponentes que haya en la expresión.

Simbólicamente: $(a^n)^m = a^{mn}$

Ejemplo: $\{[(-2)^3]^5\}^2 = (-2)^{3 \times 5 \times 2} = (-2)^{30}$

- **Potencia de un producto:** La potencia de un producto es igual al producto de dichas potencias.

Simbólicamente: $(ab)^n = a^n b^n$

Ejemplo: $(5 \times 2)^3 = 5^3 \times 2^3$

- **Potencia de un cociente:** La potencia de un cociente es igual al cociente de dichas potencias.

Simbólicamente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0$.

Ejemplo: $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$

- **Exponente cero:** toda cantidad con exponente cero es igual a 1

Simbólicamente: $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

La expresión 0^0 no está definida





- **Exponentes enteros negativos:** si n es cualquier entero negativo y a un número real diferente de cero se cumple que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ o que } a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

- En caso que la base sea un número racional se tiene que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Ejemplos:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

GRUPO DE PROBLEMAS

1. Coloque el signo positivo o negativo al resultado

a) $(-4)^4 = 256$

b) $(-12)^3 = 1\,728$

2. Expresa como potencia:

a) $(-5)(-5)(-5)(-5)(-5) =$

b) $(-3)(-3)(-3) =$

3. Calcula:

a) $(-12)^4 =$

b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} =$

4. Aplica propiedades

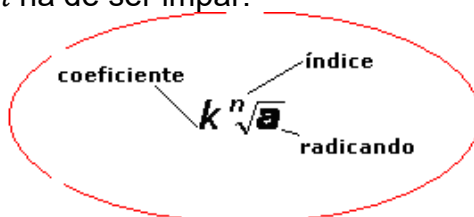
a) $((x^2)^3)^4 =$

b) $\frac{x^4 y^7}{x^2 y^{11}} =$

c) $\{[(-2)^5]^4\}^2 =$

Radicales

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$; con tal que cuando a sea negativo, n ha de ser impar.





Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

Raíz Cuadrada De Un Número

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\sqrt{b} = a$ y solo si $a^2 = b$, donde a es la raíz cuadrada de b .

Ejemplo: $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$.

Raíz Cúbica De Un Número

Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces se cumple que $\sqrt[3]{b} = a$ si y solo si $a^3 = b$, donde a es la raíz cúbica de b

Ejemplo: $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$

Raíz Enésima De Un Número

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces se cumple que $\sqrt[n]{b} = a$ si y solo si $a^n = b$, donde a es la raíz enésima de b .

Ejemplo: $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$.

Exponentes Racionales

Una expresión radical puede escribirse como una potencia de exponente racional, es decir, $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{5^2} = 5^{2/3}$

Propiedades De Los Radicales.

- Raíz enésima de un número real elevado a la potencia n : para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que: $\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n} = a^{n/n} = a$.
- Raíz enésima de un producto: la raíz enésima de un producto es igual al producto de las raíces enésimas de los factores. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.
- Raíz enésima de un cociente: la raíz enésima de un cociente es igual al cociente de las raíces enésimas del dividendo y del divisor. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{Z}^+$ y $b \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
- Raíz enésima de una raíz: la raíz enésima de una raíz es igual a otra raíz, cuyo índice es el producto de los índices. Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $b \in \mathbb{Z}^+$. se cumple que: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{b}$.
- Propiedad fundamental de los radicales: Se puede multiplicar o dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número y el valor de la raíz no cambia, por tanto $\sqrt[kn]{b^{kn}} = b^{kn/kn} = b$, donde $k \in \mathbb{N}$.

Se debe tener en cuenta que, si n es par, entonces el radicando debe ser positivo para que exista una raíz real.

- I. Determinar $\sqrt[10]{1}$
- II. Escribe en forma de radical
 - a) $2^{3/4}$
 - b) $x^{1/3}$
- III. Escribe en forma de potencia
 - a) $\sqrt[3]{5}$
 - b) $\sqrt[4]{7}$
- IV. Aplica las propiedades de la radicación
 - a) $\sqrt{\frac{144}{9}}$
 - b) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

Operaciones algebraicas fundamentales

Vamos a clasificar los elementos que conforman un polinomio, veamos con el siguiente ejemplo una manera de realizarlo.

Sea el polinomio: $\frac{3}{4}x^2 - 5x^3 + x - \frac{1}{3}$

Vamos a ordenarlo por el exponente de la variable y a describir sus elementos:

$$-5x^3 + \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{3}$$

Términos	$-5x^3$	$\frac{3}{4}x^2$	x	$-\frac{1}{3}$
Variable	x	x	x	
Coeficientes de la variable	-5	$\frac{3}{4}$	1	
Exponentes de la variable	3	2	1	
* Grado del polinomio	3			
Término Independiente				$-\frac{1}{3}$

*El grado del polinomio lo representa el exponente mayor de la variable

Clasificación de los Polinomios

Los polinomios, según el número de términos, se clasifican en:

Monomio: Es aquella expresión algebraica que consta de un solo término.

Ejemplos: $-\frac{3}{7}x^2$, 5 , $\frac{a^2bx}{2}$

Binomio: Es aquella expresión algebraica que tiene dos términos:

Ejemplos: $3x + 1$, $x^4 - \frac{5}{4}a$



Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

Trinomio: Es aquella expresión algebraica que tiene tres términos:

$$\text{Ejemplos: } \frac{6}{5}x^3 + x - \frac{1}{7}; \quad -\frac{9}{2}y^2 + y - 5$$

Polinomio: Es aquella expresión algebraica que tiene más de tres términos.

$$\text{Ejemplo: } x^3 - 3x^2 + 6x - 2$$

Suma y resta de polinomios y combinaciones de estas operaciones

Se eliminan los paréntesis, posteriormente se suman algebraicamente los términos semejantes y se ordenan en orden decreciente según el exponente. De las operaciones que podemos realizar con los polinomios estas son las más sencillas. Veamos algunos ejemplos:

Dados los polinomios:

$$P(x) = 4x^2 - 1$$

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$$

$$R(x) = 6x^2 + x + 1$$

$$S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$$

$$T(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5$$

$$U(x) = x^2 + 2$$

Determinar para cada caso:

1. $P(x) + Q(x) = (4x^2 - 1) + (x^3 - 3x^2 + 6x - 2) = x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 6x - 2 - 1 = x^3 + x^2 + 6x - 3.$
2. $P(x) - U(x) = (4x^2 - 1) - (x^2 + 2) = 4x^2 - 1 - x^2 - 2 = 3x^2 - 3.$
3. $P(x) + R(x) = (4x^2 - 1) + (6x^2 + x + 1) = 4x^2 + 6x^2 + x - 1 + 1 = 10x^2 + x$
4. $2P(x) - R(x) = 2(4x^2 - 1) - (6x^2 + x + 1) = 8x^2 - 2 - 6x^2 - x - 1 = 2x^2 - x - 3$

Multiplicación de monomios por polinomios

Para multiplicar monomios por polinomios se aplica la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o la resta, es decir, se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio teniendo en cuenta la ley de los signos. Luego se separan los productos parciales por sus respectivos signos.

 $6bx^3$ por $4x^2 - 6x + 8$

$$\begin{aligned} 6bx^3(4x^2 - 6x + 8) &= 6bx^3(4x^2) + 6bx^3(-6x) + 6bx^3(8) \\ &= 24bx^5 - 36bx^4 + 48bx^3 \end{aligned}$$

**2026**
año de
Maza



Multiplicación de polinomios por polinomios

Para multiplicar dos polinomios se ordena el polinomio multiplicando y se efectúan los productos entre todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, se tiene en cuenta la ley de los signos y se reducen los términos semejantes.

Multiplicar:

$$6x - 4y \text{ por } -3y + 4x$$

Se ordena de mayor a menor respecto de la x .

Se multiplica el primer término del multiplicador por cada uno de los términos del multiplicando, y el segundo término del multiplicador por cada uno de los términos del multiplicando.

Luego, se escriben los productos parciales de manera que queden organizados en forma de columna los términos semejantes para luego reducirlos.

$$\begin{array}{r} 6x - 4y \\ 4x - 3y \\ \hline 24x^2 - 16xy \\ -18xy \quad 12y^2 \\ \hline 24x^2 - 34xy \quad 12y^2 \end{array}$$

Multiplicación de polinomios con exponentes literales

Multiplicar:

$$3a^{x-1} + a^x - 2a^{x-2} \text{ por } a^x - a^{x-1} + a^{x-2}$$

Ordenando respecto de la letra a de mayor a menor

$$\begin{array}{r} a^x + 3a^{x-1} - 2a^{x-2} \\ a^x - a^{x-1} + a^{x-2} \\ \hline a^{2x} + 3a^{2x-1} - 2a^{2x-2} \\ -a^{2x-1} - 3a^{2x-2} + 2a^{2x-3} \\ a^{2x-2} \quad 3a^{2x-3} - 2a^{2x-4} \\ \hline a^{2x} + 2a^{2x-1} - 4a^{2x-2} + 5a^{2x-3} - 2a^{2x-4} \end{array}$$

División de expresiones algebraicas





Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

Para dividir expresiones algebraicas se utiliza la ley de los signos que es igual a la de la multiplicación. Recordando que: la división de signos iguales da positivo+; y la división de signos diferentes da negativo—.

División de polinomios por monomios

El primer término del cociente se multiplica por cada uno de los términos del divisor aplicando la ley de los signos. Cada uno de los productos se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo a cada producto y se escribe cada término debajo de su semejante. Si algún término de estos productos no tiene término semejante en el dividendo, se escribe en el lugar correspondiente de acuerdo como se haya ordenado inicialmente el dividendo y el divisor. Se baja el o los términos siguientes y se repite de nuevo el proceso hasta que el residuo de la división sea cero, cuando la división es exacta.

Dividir $6m^3 - 8m^2n + 20mn^2$ entre $-2m$

$$\frac{6m^3 - 8m^2n + 20mn^2}{-2m} = -\frac{6m^3}{2m} + \frac{8m^2n}{2m} - \frac{20mn^2}{2m} = -3m^{3-1} + 8m^{2-1}n - 10n^2$$
$$= -3m^2 + 4mn - 10n^2$$

$$4x^3 \div 4x = x^{3-1} = x^2$$

Luego tendremos:

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x - 4 \quad \bigg| \quad 4x + 4 \\ \quad \quad \quad x^2 \end{array}$$

Se multiplica este primer cociente por cada uno de los términos del divisor y los restamos del dividendo. A los productos se les cambia de signo y se acomodan debajo dónde sean semejantes con los términos del dividendo:

$$\begin{array}{r} 4x^3 \quad - 8x - 4 \quad \bigg| \quad 4x + 4 \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ -4x^3 - 4x^2 \quad \quad \quad \downarrow \\ \hline - 4x^2 - 8x \end{array}$$

Se baja el siguiente término del dividendo y se repite el procedimiento anterior sucesivamente hasta que la división de como residuo cero.

Dividir $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 2$ entre $x + 3$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 2 \quad | \quad x + 3 \\
 \underline{-x^5 - 3x^4} \\
 -2x^3 + 4x^2 - 2x + 2 \\
 \underline{+2x^3 + 6x^2} \\
 10x^2 - 2x + 2 \\
 \underline{-10x^2 - 30x} \\
 -32x + 2 \\
 \underline{+32x + 96} \\
 98
 \end{array}$$

residuo

1. Realiza las siguientes divisiones

a) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 2) \div (x^2 + x - 1)$

b) $(x^4 - x^3 + 8x + 4) \div (x^2 - x + 2)$

Solución:

a) $C(x) = x - 4$ y $r(x) = 11x - 6$

b) $C(x) = x^2 - 2$ y $r(x) = 6x + 8$

2. Dados los polinomios $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ escritos más abajo, calcula:

a) $p(x) + q(x)$;

b) $p(x) - q(x)$;

c) $p(x) + q(x) - r(x)$;

d) $p(x) - q(x) - r(x)$.

$p(x) = 4x^3 - 9x + 8$; $q(x) = 5x^3 + 3$; $r(x) = 2x^3 - x^2 + 1$

Solución:

a) $p(x) + q(x) = 9x^3 - 9x + 11$

b) $p(x) - q(x) = -x^3 - 9x + 5$

c) $p(x) + q(x) - r(x) = 7x^3 + x^2 - 9x + 10$

d) $p(x) - q(x) - r(x) = -3x^3 + x^2 - 9x + 4$

a) $p(x) + q(x) = 9x^3 - 9x + 11$;

b) $p(x) - q(x) = -x^3 - 9x + 5$;

c) $p(x) + q(x) - r(x) = 7x^3 + x^2 - 9x + 10$;

d) $p(x) - q(x) - r(x) = -3x^3 + x^2 - 9x + 4$

Productos y cocientes notables

Los siguientes productos y cocientes de polinomios son muy usuales en álgebra, normalmente identificables y ayudan en el proceso de factorización de polinomios. Por tal razón se denominan productos notables.

Se llama **productos notables** a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. En seguida se enlistan los productos notables más comunes:

a) Binomio al cuadrado: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

b) Binomio conjugado: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

c) Binomio al cubo: $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

d) Producto de dos binomios de la forma: $(mx + a)(nx + b)$

Ejemplo 1a) Desarrollar $(4a + 5b^2)^2$

Elevar al cuadrado $4a + 5b^2$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo y tendremos: $(4a + 5b^2)^2 = (4a + 5b^2)(4a + 5b^2)$, efectuando este producto se tiene que:

$$\begin{array}{r} 4a + 5b^2 \\ 4a + 5b^2 \\ \hline 16a^2 + 20ab^2 \\ 20ab^2 + 25b^4 \\ \hline 16a^2 + 40ab^2 + 25b^4 \end{array}$$

O sea que $(4a + 5b^2)^2 = 16a^2 + 40ab^2 + 25b^4$, entonces el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el duplo de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad.

Nota: Las operaciones que se han detallado para mayor facilidad, no deben escribirse sino verificarse mentalmente.

Representación gráfica del cuadrado de la suma de dos cantidades.

El cuadrado de la suma de dos cantidades puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos. Véanse los siguientes pasos:

- Sea $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Construimos un cuadrado de a unidades de lado, es decir, de lado a ; y uno de b unidades de lado, es decir de lado b (Figura 1 y 2):

Figura 1

Figura 2

c) Construimos dos rectángulos de largo a y ancho b (figura 3 y 4):

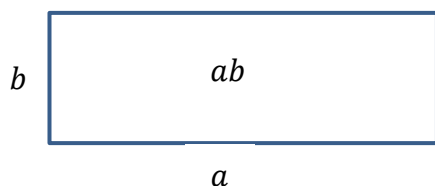


Figura 3

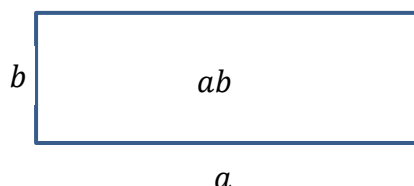


Figura 4

Uniendo estas cuatro figuras como se indica en la Figura 5, formaremos un cuadrado de $(a + b)$ unidades de lado. El área de este cuadrado es

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

y como puede verse en la figura 5 esta área está formada por un cuadrado de área a^2 y dos rectángulos de área ab cada uno o sea $2ab$.

Luego: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

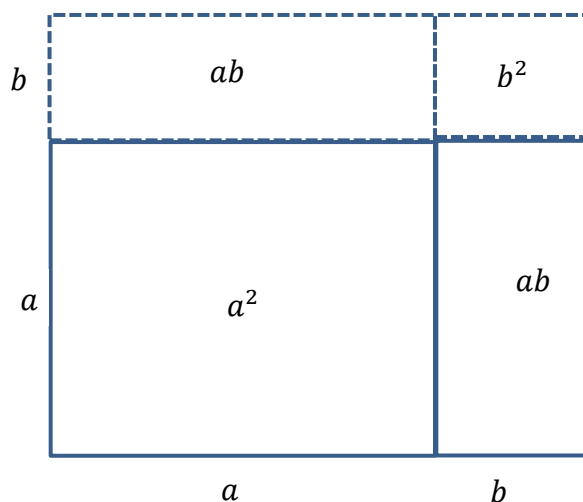


Figura 5

Ejemplo 2b) Efectuar $(5a^{n+1} + 3a^m)(3a^m - 5a^{n+1})$

Efectuando esta multiplicación tenemos:

$$\begin{array}{r} (5a^{n+1} + 3a^m) \\ (3a^m - 5a^{n+1}) \\ \hline 15a^{m(n+1)} + 9a^{2m} \end{array}$$



Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

$$\frac{-15a^{m(n+1)}}{0} + 25a^{2(n+1)} + 9a^{2m} + 25a^{2n+2}$$

Entonces la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en la diferencia) menos el cuadrado en el sustraendo.

Nota: como el orden de los sumandos no altera la suma, $(5a^{n+1} + 3a^m)$ es lo mismo que $(3a^m + 5a^{n+1})$ pero téngase presente que $(3a^m - 5a^{n+1})$ no es lo mismo que $(5a^{n+1} - 3a^m)$. Por eso hay que fijarse en la diferencia y escribir el cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo.

Ejemplo 3d) Efectuar $(x^2 + 7)(x^2 + 3)$

El producto de dos binomios de esta forma, en los cuales los términos en x tienen distintos coeficientes, puede hallarse fácilmente siguiendo los pasos que se indican en el siguiente esquema:

$$(x^2 + 7)(x^2 + 3) = x^4 + 7x^2 + 3x^2 + 21$$

Reduciendo términos semejantes se obtiene $x^4 + 10x^2 + 21$.

Se llama **cocientes notables** a ciertos cocientes que obedecen a reglas fijas y que pueden ser escritos por simple inspección. A continuación se presentan los más comunes:

e) Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las cantidades: $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$, $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$

f) Cociente de la suma o diferencia de los cubos de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b}, \quad \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

Ejemplo 4e) Dividir $9x^2 - y^2$ entre $3x + y$.

Lo primero que debemos hacer es desarrollar la diferencia de cuadrados del numerador, así se tiene que:

$$\frac{(3x + y)(3x - y)}{(3x + y)} = (3x - y)$$

Por lo tanto, la diferencia de cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de las dos cantidades es igual a la diferencia de las cantidades.

Ejemplo 4f) Dividir $1 - (a + n)^2$ entre $1 - (a + n)$

Desarrollamos primero la diferencia de cuadrados en el numerador, así se tiene lo siguiente:





Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

$$\frac{[1 + (a + n)][1 - (a + n)]}{1 - (a + n)} = 1 + (a + n)$$

Entonces, la diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las cantidades es igual a la suma de las cantidades.

Ejercicios propuestos.

- $(a^2x + by^2)^2 = a^4x^2 + 2a^2bxy^2 + b^2y^4$
- $(a^{x-2} - 5)^2 = a^{2x-4} - 10a^{x-2} + 25$
- $(3x^a - 5y^m)(5y^m + 3x^a) = 9x^{2a} - 25y^{2m}$
- $(2a - 1)(1 + 2a) = 4a^2 - 1$
- $(1 - a^2)^3 = 1 - 3a^2 + 3a^4 - a^6$
- $(a^x - 3)(a^x + 8) = a^{2x} + 5a^x + 24$
- $\frac{36m^2 - 49n^2x^4}{6m - 7nx^2} = 6m + 7nx^2$
- $\frac{(n^6+1)}{(n^2+1)} = n^4 - n^2 + 1$

Factorización

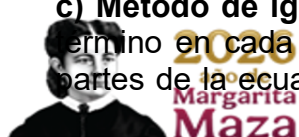
Ecuaciones Lineales y Cuadráticas

Para este curso, utilizaremos tres métodos de solución para ecuaciones lineales:

a) Método de suma y resta: la idea principal de este método consiste en manipular mediante operaciones básicas las ecuaciones, de modo que alguna de las incógnitas sea eliminada, para así poder tener una ecuación con una sola incógnita sencilla de resolver. Después sustituir el valor de la incógnita encontrada en alguna de las dos ecuaciones originales y resolver para encontrar el valor de la otra incógnita.

b) Método de sustitución: la idea principal de este método consiste en despejar alguna de las dos incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones, después sustituir el valor de la incógnita despejada en la ecuación no utilizada para así obtener una ecuación con una incógnita sencilla de resolver. Después sustituir el valor de la incógnita encontrada en la ecuación despejada para encontrar el valor de la otra incógnita.

c) Método de igualación: la idea principal de este método es despejar el mismo término en cada una de las ecuaciones, de esta forma, podemos igualar ambas partes de la ecuación despejada puesto que equivaldrían al mismo valor, con ello





Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

construimos una ecuación con una incógnita sencilla de resolver. Después sustituir el valor de la incógnita encontrada en alguna de las ecuaciones despejadas para encontrar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 1.

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$3x + 2y = 14 \quad (1)$$

$$2x - y = 0 \quad (2)$$

a) Método de suma y resta.

Multiplicamos la ecuación (2) por 2:

$$4x - 2y = 0 \quad (3)$$

A continuación, sumamos la ecuación (1) con la ecuación (3):

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 14 \\ 4x - 2y = 0 \\ \hline 7x = 14 \end{array} \quad (4)$$

Despejamos x y obtenemos su resultado:

$$x = \frac{14}{7} = 2 \quad (5)$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación (1) ó (2). En este caso, tomaremos la ecuación (1). Despejamos y para encontrar su valor:

$$\begin{array}{r} 3(2) + 2y = 14 \\ 6 + 2y = 14 \\ 2y = 14 - 6 \\ y = \frac{8}{2} = 4 \end{array} \quad (6)$$

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array}$$

b) Método de sustitución.

Despejamos y en la ecuación (2):

$$2x = y \quad (7)$$

Sustituimos y en la ecuación (1):

$$3x + 2(2x) = 14 \quad (8)$$

Despejamos x para encontrar su valor:

$$\begin{array}{r} 3x + 4x = 14 \\ 7x = 14 \\ x = \frac{14}{7} = 2 \end{array} \quad (9)$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación (7) para encontrar el valor de y :

$$\begin{array}{r} 2(2) = y \\ y = 4 \end{array} \quad (10)$$

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array}$$

c) Método de igualación.



En la ecuación (2) multiplicamos por -2 :

$$-4x + 2y = 0 \quad (11)$$

Despejamos el término $2y$ en ambas las ecuaciones (1) y (11):

$$2y = 14 - 3x \quad (12)$$

$$2y = 4x \quad (13)$$

Igualamos los miembros derechos puesto que ambos son iguales al término $2y$:

$$4x = 14 - 3x \quad (14)$$

Despejamos x para encontrar su valor:

$$4x + 3x = 14$$

$$7x = 14$$

$$x = \frac{14}{7} = 2 \quad (15)$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación (13) y despejamos y para encontrar su valor:

$$2y = 4(2) = 8$$

$$y = \frac{8}{2} = 4 \quad (16)$$

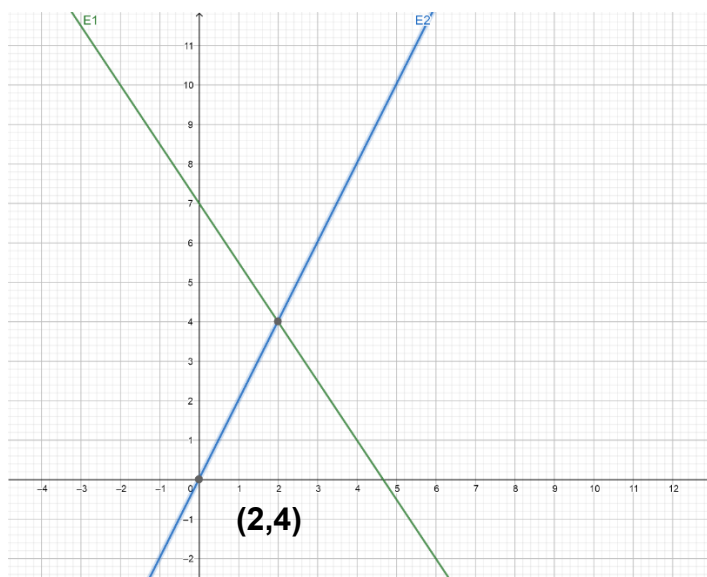
Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$x = 2$$

$$y = 4$$

Como podemos observar, sin importar el método utilizado obtenemos la misma solución.

La interpretación geométrica de la solución del sistema de ecuaciones se representa en la siguiente gráfica, donde el punto $(2,4)$ representa la intersección de las rectas representadas por cada ecuación.



Ejemplo 2.

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 2y = 2 \quad (1)$$

$$-x + 3y = -9 \quad (2)$$

a) Método de suma y resta.

Multiplicamos la ecuación (2) por 2:

$$-2x + 6y = -18 \quad (3)$$

A continuación, sumamos la ecuación (1) con la ecuación (3):

$$\begin{array}{r} 2x + 2y = 2 \\ -2x + 6y = -18 \\ \hline 8y = -16 \end{array} \quad (4)$$

Despejamos y y obtenemos su resultado:

$$y = \frac{-16}{8} = -2 \quad (5)$$

Sustituimos el valor de y en la ecuación (1) ó (2). En este caso, tomaremos la ecuación (1). Despejamos x para encontrar su valor:

$$\begin{array}{l} 2x + 2(-2) = 2 \\ 2x - 4 = 2 \\ 2x = 2 + 4 = 6 \\ x = \frac{6}{2} = 3 \end{array} \quad (6)$$

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \end{array}$$

b) Método de sustitución.

Despejamos x en la ecuación (2):

$$x = 3y + 9 \quad (7)$$

Sustituimos x en la ecuación (1):

$$2(3y + 9) + 2y = 2 \quad (8)$$

Despejamos y para encontrar su valor:

$$\begin{array}{l} 6y + 18 + 2y = 2 \\ 8y = 2 - 18 = -16 \\ y = \frac{-16}{8} = -2 \end{array} \quad (9)$$

Sustituimos el valor de y en la ecuación (7) para encontrar el valor de x :

$$\begin{array}{l} x = 3(-2) + 9 = -6 + 9 \\ x = 3 \end{array} \quad (10)$$

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \end{array}$$

c) Método de igualación.

En la ecuación (2) multiplicamos por -2 :

$$2x - 6y = 18 \quad (11)$$

Despejamos el término $2x$ en ambas las ecuaciones (1) y (11):

$$2x = 2 - 2y \quad (12)$$

$$2x = 18 + 6y \quad (13)$$

$$2 - 2y = 18 + 6y \quad (14)$$

Igualamos los miembros derechos puesto que ambos son iguales al término $2x$:

Despejamos y para encontrar su valor:

$$2 - 18 = 6y + 2y$$

$$-16 = 8y$$

$$y = \frac{-16}{8} = -2 \quad (15)$$

Sustituimos el valor de y en la ecuación (13) y despejamos x para encontrar su valor:

$$2x = 18 + 6(-2) = 18 - 12 = 6$$

$$x = \frac{6}{2} = 3 \quad (16)$$

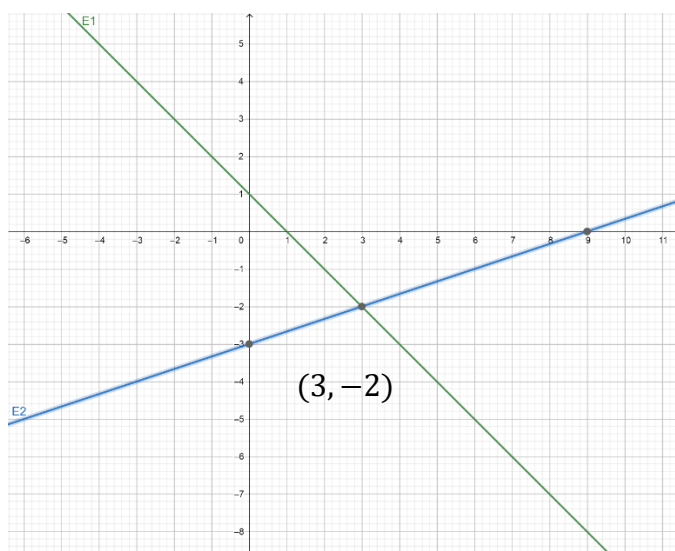
Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$x = 3$$

$$y = -2$$

Como podemos observar, sin importar el método utilizado obtenemos la misma solución.

La interpretación geométrica de la solución del sistema de ecuaciones se representa en la siguiente gráfica, donde el punto $(3, -2)$ representa la intersección de las rectas representadas por cada ecuación.



CASOS PARTICULARES.

I. El sistema no tiene solución:

Ejemplo1:

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$2x + 2y = 10 \quad (1)$$

$$x + y = 15 \quad (2)$$

Solución.

De la ecuación (1) despejamos x :

$$x = 15 - y \quad (3)$$

Sustituimos x en la ecuación (1) y resolvemos:

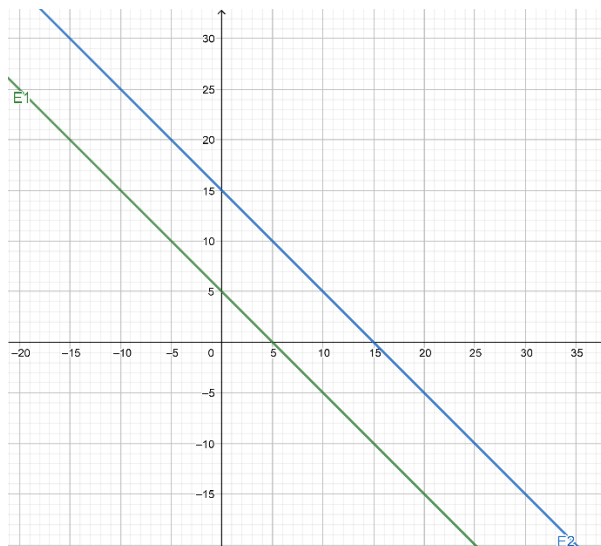
$$2(15 - y) + 2y = 10 \quad (4)$$

$$30 - 2y + 2y = 10 \quad (5)$$

$$-2y + 2y = 10 - 30 \quad (6)$$

$$0 = -20 \quad (7)$$

Como podemos observar, se elimina y quedándonos un resultado incongruente, por lo tanto, el sistema no tiene solución, esto significa que las gráficas de las ecuaciones nunca se intersectan (son paralelas entre sí) lo véase en la siguiente gráfica:



II. El sistema tiene infinitas soluciones:

Ejemplo 2:

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$2x + 2y = 10 \quad (1)$$

$$x + y = 5 \quad (2)$$

Solución.

De la ecuación (1) despejamos x :

$$x = 5 - y \quad (3)$$

Sustituimos x en la ecuación (1) y resolvemos:

$$2(5 - y) + 2y = 10 \quad (4)$$

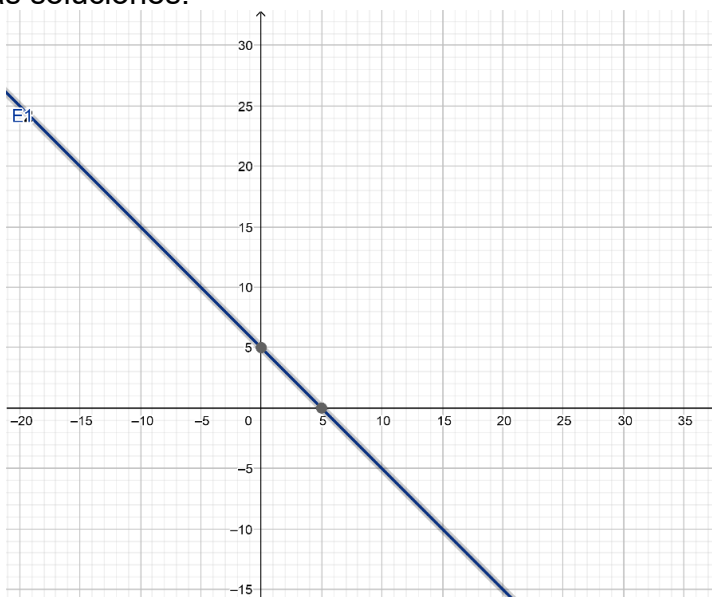
$$10 - 2y + 2y = 10 \quad (5)$$

$$-2y + 2y = 10 - 10 \quad (6)$$

$$0 = 0 \quad (7)$$

Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

En este caso, también se elimina y , sin embargo el resultado si es válido y se cumple la igualdad, lo cual significa, al quedar la solución como una constante que las gráficas de las ecuaciones se intersectan en todos los puntos, es decir, es la misma gráfica y por lo tanto cualquier punto tomado será solución del sistemas y tendremos entonces infinitas soluciones:



EJERCICIOS PROPUESTOS:

Ejercicio:

$$\begin{aligned} 1.- \quad x + y &= 0 \\ 3x - 4y &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.- \quad 3y - 6x &= 7 \\ 3x - \frac{1}{3}y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.- \quad 5x + 2y - 8 &= 0 \\ -3x - y &= -4 \end{aligned}$$

Respuesta:

$$x = 2 \quad y = -2$$

$$x = \frac{1}{3}; \quad y = 3$$

$$x = 0 \quad y = 4$$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS.

Para este curso, utilizaremos tres métodos de solución para ecuaciones cuadráticas:

a) Completar el binomio: la idea principal de este método consiste expresar nuestra ecuación en la forma $ax^2 + bx = c$ donde $a = 1$ debe cumplirse, en caso que a sea distinto de 1, entonces tendrá dividirse toda la ecuación entre el valor de a . Tomaremos el cuadrado de la mitad del valor de b y lo sumaremos en ambos lados de la ecuación, con esto completaremos el binomio que será reexpresado como un binomio cuadrado perfecto. Al sacar raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación eliminaremos el cuadrado del binomio y obtendremos las dos raíces de c , las cuales nos darán luego del despeje los valores de nuestra incógnita.

b) Fórmula general: la utilización de la fórmula general nos dará las raíces de nuestra ecuación con la cual luego de las operaciones pertinentes encontraremos los valores de nuestra incógnita. Para poder utilizar la fórmula general, es necesario expresar nuestra ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, e identificar los valores correspondientes para a, b, c y sustituir los valores en dicha fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dependiendo de los valores de a, b, c obtendremos tres casos para la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$:

Caso I: Raíces reales y distintas.

Este caso resulta cuando $b^2 - 4ac > 0$, teniendo entonces como resultado que x_1 y x_2 son reales y distintas entre sí.

Caso II: Raíces reales repetidas.

Este caso resulta cuando $b^2 - 4ac = 0$, teniendo entonces como resultado que $x_1 = x_2$.

Caso III: Raíces complejas conjugadas.

Este caso resulta cuando $b^2 - 4ac < 0$, por lo tanto nos queda en el radical un número negativo, siendo necesario expresar el resultado con números complejos; x_1 y x_2 son diferentes entre si.

c) Factorización: La idea principal de este método es expresar nuestra ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a = 1$ debe cumplirse, en caso que a sea distinto de 1, entonces tendrá dividirse toda la ecuación entre el valor de a . Necesitamos expresar nuestra ecuación como el producto de dos binomios conformados por nuestra incógnita en ambos binomios y dos constantes cuya multiplicación entre sí deben ser igual a c y la sumas de éstas mismas deberá ser igual a b . El negativo de éstas constantes serán los valores de nuestra incógnita.



Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 4x - 36 = -4 \quad (1)$$

a) **Completar cuadrados:**

Dejamos los términos constantes en un lado de la ecuación y del otro lado los términos con las incógnitas:

$$x^2 + 4x = 32 \quad (2)$$

Necesitamos, completar el cuadrado para obtener un binomio cuadrado perfecto, para ello es necesario tomar la mitad del coeficiente de x , en este caso 4, por lo tanto, la mitad es 2. Después elevamos al cuadrado dicho término y se lo sumamos a la ecuación (2) en ambos miembros:

$$x^2 + 4x + (4) = 32 + 4 = 36 \quad (3)$$

Ahora podemos reescribir el término izquierdo de la ecuación (3) como un cuadrado:

$$(x + 2)^2 = 36 \quad (4)$$

A continuación, obtenemos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación (4):

$$x + 2 = \pm 6 \quad (5)$$

Obtenemos las dos ecuaciones que surgen a partir de la ecuación (5):

$$x_1 + 2 = +6 \quad (6)$$

$$x_2 + 2 = -6 \quad (7)$$

Despejamos x_1 y x_2 para obtener sus valores respectivamente:

De (6):

$$x_1 = 6 - 2 = 4 \quad (8)$$

De (7):

$$x_2 = -6 - 2 = -8 \quad (9)$$

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -8$$

b) **Fórmula general:**

Igualemos la ecuación (1) a cero:

$$x^2 + 4x - 32 = 0 \quad (10)$$

Identificamos los coeficientes a, b, c en la ecuación (10):

$$a = 1; b = 4 \text{ y } c = -32$$

Sustituimos los valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-32)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-4 \pm 12}{2} \quad (11)$$

Obtenemos las dos ecuaciones que surgen a partir de la ecuación (11):

$$x_1 = \frac{-4 + 12}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad (12)$$

$$x_2 = \frac{-4 - 12}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \quad (13)$$

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -8$$

c) Factorización:

En la ecuación (1), la reescribimos igualándola a cero por un lado:

$$x^2 + 4x - 36 + 4 = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \quad (14)$$

Necesitamos dos números que multiplicados entre ellos sean igual al término constante (-32 , en este caso), además la suma de estos debe ser igual al coeficiente del término que incluya a x en primera potencia (4 , en este caso). Los números son 8 y -4 ; ahora podemos realizar la factorización de la ecuación de la siguiente forma:

$$(x - 4)(x + 8) = 0 \quad (15)$$

De acuerdo a la ecuación (15), tenemos dos nuevas ecuaciones:

$$(x_1 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 4 \quad (16)$$

$$(x_2 + 8) = 0 \rightarrow x_2 = -8 \quad (17)$$

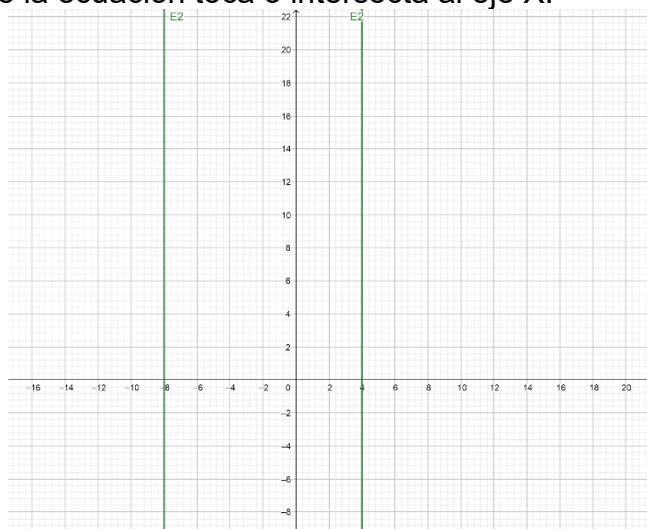
Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -8$$

Como podemos observar, sin importar el método utilizado obtenemos la misma solución.

La interpretación geométrica de la solución de la ecuación cuadrática se representa en la siguiente gráfica, donde las soluciones $x_1 = 4$ y $x_2 = -8$ son los puntos en donde la gráfica de la ecuación toca o intersecta al eje X.



Ejemplo 2.

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$4x^2 - 4x + 6 = 14 \quad (1)$$

a) Completar cuadrados:

Dejamos los términos constantes en un lado de la ecuación y del otro lado los términos con las incógnitas:

$$4x^2 - 4x = 14 - 6 = 8 \quad (2)$$

Factorizamos el término $[4]$ del lado izquierdo y lo pasamos dividiendo al otro miembro de la ecuación (2):



Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

$$4(x^2 - x) = 8 \rightarrow x^2 - x = \frac{8}{4} = 2 \quad (3)$$

Necesitamos, completar el cuadrado para obtener un binomio cuadrado perfecto, para ello es necesario tomar la mitad del coeficiente de x , en este caso -1 , por lo tanto, la mitad es $-\frac{1}{2}$. Después elevamos al cuadrado dicho término y se lo sumamos a la ecuación (3) en ambos miembros:

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{4}\right) = 2 + \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} \quad (4)$$

Ahora podemos reescribir el término izquierdo de la ecuación (4) como un cuadrado:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad (5)$$

A continuación, obtenemos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación (5):

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2} \quad (6)$$

Obtenemos las dos ecuaciones que surgen a partir de la ecuación (6):

$$x_1 - \frac{1}{2} = +\frac{3}{2} \quad (7)$$

$$x_2 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \quad (8)$$

Despejamos x_1 y x_2 para obtener sus valores respectivamente:

De (7):

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \quad (9)$$

De (8):

$$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1 \quad (10)$$

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$

b) Fórmula general:

Igualamos la ecuación (1) a cero:

$$4x^2 - 4x - 8 = 0 \quad (11)$$

Identificamos los coeficientes a, b, c en la ecuación (11):

$a = 4$; $b = -4$ y $c = -8$

Sustituimos los valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(-8)}}{2(4)}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{4 \pm 12}{8} \quad (12)$$

Obtenemos las dos ecuaciones que surgen a partir de la ecuación (12):

$$x_1 = \frac{4 + 12}{8} = \frac{16}{8} = 2 \quad (13)$$

$$x_2 = \frac{4 - 12}{8} = -\frac{8}{8} = -1 \quad (14)$$



Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\x_2 &= -1\end{aligned}$$

c) Factorización:

En la ecuación (1), la reescribimos igualándola a cero por un lado:

$$4x^2 - 4x - 8 = 0 \quad (11)$$

Podemos factorizar en la ecuación (11) y reescribir de la siguiente forma:

$$4(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad (12)$$

Necesitamos dos números que multiplicados entre ellos sean igual al término constante (-2 , en este caso), además la suma de estos debe ser igual al coeficiente del término que incluya a x en primera potencia (-1 , en este caso). Los números son 1 y -2 ; ahora podemos realizar la factorización de la ecuación de la siguiente forma:

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \quad (13)$$

De acuerdo a la ecuación (13), tenemos dos nuevas ecuaciones:

$$(x_1 - 2) = 0 \rightarrow x_1 = 2 \quad (14)$$

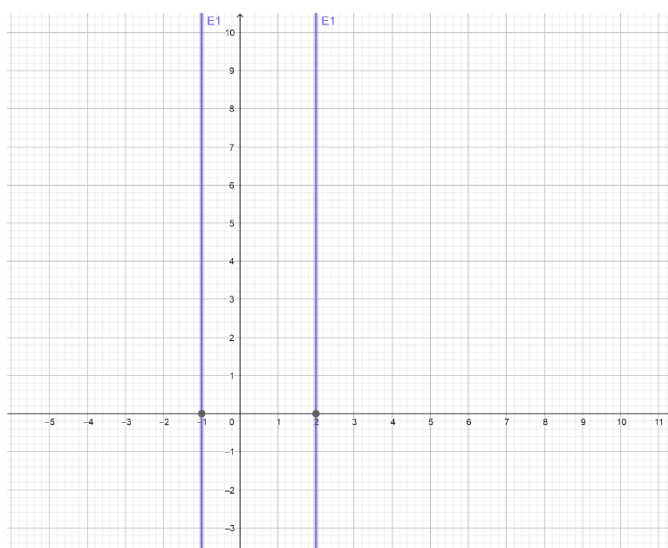
$$(x_2 + 1) = 0 \rightarrow x_2 = -1 \quad (15)$$

Hemos encontrado los valores de nuestras incógnitas:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\x_2 &= -1\end{aligned}$$

Como podemos observar, sin importar el método utilizado obtenemos la misma solución.

La interpretación geométrica de la solución de la ecuación cuadrática se representa en la siguiente gráfica, donde las soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$ son los puntos en donde la gráfica de la ecuación toca o intersecta al eje X .



EJERCICIOS PROPUESTOS:

Ejercicio:

Respuesta:

1.- $3x^2 - 2x - 21 = 0$

$x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{7}{3}$

2.- $x^2 + 3x - 24 = 16$

$x_1 = 5; \quad x_2 = -8$

3.- $x^2 - 8x + \frac{3}{4} = -3$

$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{15}{2}$

Funciones Algebraicas y Trascendentes

Las funciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones exponenciales

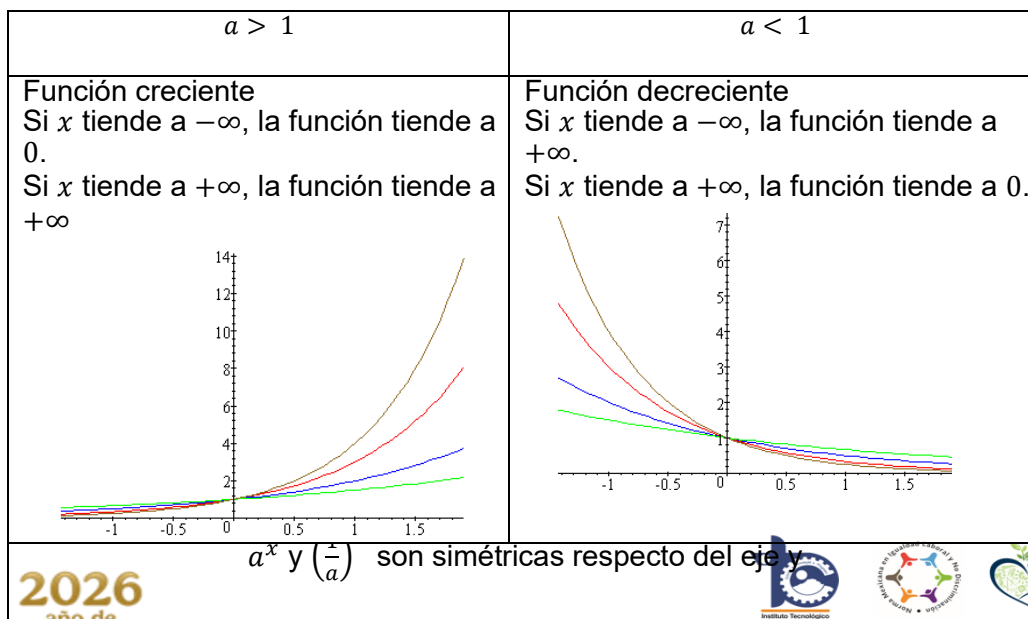
Una función exponencial es la que se define a partir de las potencias de los números. Su expresión es de la forma ax , siendo $a > 0$. El dominio de estas funciones son todos los números reales y su imagen son todos los números positivos. La función es siempre creciente si $a > 1$, y siempre decreciente si $a < 1$. Estas funciones no tienen máximos ni mínimos. Las funciones exponenciales resultan muy útiles en el estudio de procesos de crecimiento/decrecimiento de poblaciones. Una función exponencial de base a es la que se define a partir de las potencias de los números. Su expresión es de la forma:

$$a^x, \text{ con } a > 0$$

Por ejemplo, $g(x) = 3^x$, es una función de este tipo. Así que $g(2) = 3^2 = 9$.

Sus características son:

Dominio: $(-\infty, \infty)$. Imagen: $:(0, \infty)$, No tienen ni máximos ni mínimos. Pasan por el punto $(0,1)$.





Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

Una de las funciones exponenciales más importantes es e^x , es decir, función exponencial cuya base es el número $e = 2,71828182845904523...$

Figura 1. Graficas de la función exponencial

La función exponencial es una de las funciones más importantes por sus aplicaciones, ya que es capaz de describir una gran variedad de fenómenos, especialmente, los de crecimiento; a veces, estas funciones también se denominan funciones de crecimiento. Se trata de aplicaciones tan importantes como el crecimiento de una población de bacterias en un laboratorio, el crecimiento demográfico del número de animales, el modo como decrece la materia radiactiva (crecimiento negativo), la razón con la que un obrero aprende cierto proceso, el aumento en adquirir experiencia sobre cómo escribir a máquina o nadar mediante la práctica y la razón con la que una enfermedad contagiosa se disemina con el tiempo. Las funciones exponenciales también desempeñan una importante función en el cálculo del interés obtenido en una cuenta bancaria, es decir, describen el aumento monetario a un interés compuesto, etc.

Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es una ecuación que incluye funciones exponenciales. Para resolver una ecuación exponencial deben agruparse al máximo las potencias para sustituir la ecuación exponencial por una ecuación lineal o cuadrática. Por ejemplo, los pasos para resolver:

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

$$7^x + 7 * 7^x + 7^2 * 7^x = 2793$$

$$7^x(1 + 7^x + 7^2) = 2793$$

$$7^x = \frac{2793}{57} = 49$$

por lo tanto: $x = 2$.

El mismo procedimiento debe seguirse para resolver un sistema de ecuaciones exponencial. Para resolver:

$$5^x = 5^y * 626$$

$$2^x * 2^y = 256$$

Estas ecuaciones se convierten en:

$$5^{x-y} = 5^4$$

$$2^{x+y} = 2^8$$

Produciendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x - y = 4$$

$$x + y = 8$$

La solución a este sistema se puede obtener con el método de reducción. Primero se suma la ecuación (1) con la ecuación (2), para obtener:

$$2x = 12$$



De aquí que $x = 6$. Para obtener el valor de “ y ”, se multiplica por (-1) la ecuación (1) y después se suma con la ecuación (2), obteniendo

$$2y = 4$$

Por lo que $y = 2$.

Composición de funciones y función inversa

La composición de la función f con la función g es otra función, designada como $g \circ f$, que cumple:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Dos funciones, f y g , se dicen que son inversas una de otra si:

$$(g \circ f)(x) = x, y (f \circ g)(x) = x$$

La función inversa de f se denota f^{-1} .

El logaritmo y sus propiedades

El logaritmo en base a , con $a > 0$ de un número real positivo x , se calcula de la siguiente manera:

$$\log_a x = y \quad \text{si } x = a^y$$

y tiene las siguientes propiedades:

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

El logaritmo del producto es igual a la suma de logaritmos:

$$\log_a (x * y) = \log_a x + \log_a y$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

El logaritmo de un cociente es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador:

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Las funciones logarítmicas

La función logaritmo de base a ($a > 0, a \neq 1$) es la función inversa de la función exponencial de base a ; $y = \log_a x$ si $x = a^y$.

Sus características son:

Dominio: $(0, +\infty)$.

Imagen: $(-\infty, +\infty)$.

No tienen ni máximos ni mínimos. Pasan por el punto $(1,0)$.

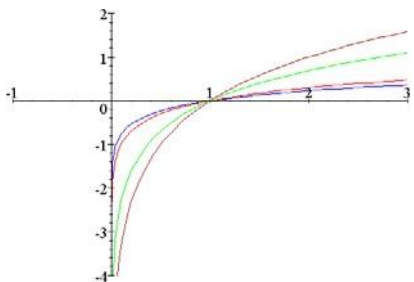
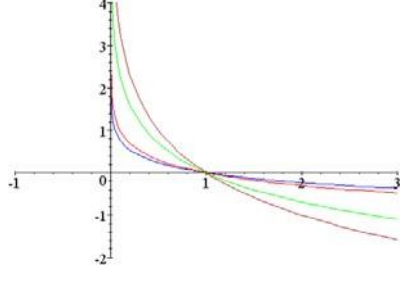
$a > 1$	$a < 1$
Función creciente si x tiende a 0, la función tiende a $-\infty$ si x tiende a $+\infty$, la función tiende a $+\infty$ 	Función decreciente si x tiende a 0, la función tiende a $+\infty$ si x tiende a $+\infty$, la función tiende a $-\infty$ 
las gráficas de $\log_a x$ y $\log_{1/a} x$ son simétricas respecto al eje x	
Una de las funciones logarítmicas más importantes es $\ln x$, función logaritmo neperiano, es decir, función logarítmica cuya base es el número $e = 2.718281\dots$	

Figura 2. Gráficas de la función logaritmo.

Las ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es una ecuación con funciones logarítmicas. Para resolver una ecuación logarítmica deben agruparse al máximo los logaritmos para sustituir la ecuación logarítmica por una ecuación lineal o cuadrática. Por ejemplo, los pasos para resolver:

$$2\log x - \log(x - 16) = 2$$

$$x^2 - 100x + 1600$$

las soluciones son $x = 20$ y $x = 80$.

Resuelva la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log(2) + \log(x + 3) = \log(x + 5)$$

$$\log(2 * (x + 3)) = \log(x + 5)$$

$$\log(2x + 6) = \log(x + 5)$$

$$2x + 6 = x + 5$$

$$x = -1$$

Ejercicios

1. Encuentre una función exponencial del tipo $f(x) = a^x$, que cumpla que $f(6) = 64$.
2. Calcular los siguientes logaritmos de manera algebraica
 - a. $\log_2 32$
3. Encuentra una función logarítmica del tipo $f(x) = \log_a x$, que cumpla $f(125) = 3$.

Soluciones.

1. Si $f(6) = 64$, entonces $x = 6$, lo que implica que $a^6 = 64$, aplicando raíz se tiene que:

$$a = \sqrt[6]{64} = 2$$

2. Si $f(125) = 3$, se requiere que $y = \log_a(x)$ y que $x = a^y$. Nuestras variables son $x = 125, y = 3$ de esta manera

$$a = \sqrt[3]{125} = 5$$

Aplicaciones

Fricción en bandas

Considere una banda plana que pasa sobre un tambor cilíndrico fijo (ver figura). Se desea determinar la relación que existe entre los valores de las tensiones presentes en las dos partes de la banda cuando ésta se encuentra a punto de deslizarse hacia la derecha. Después de realizar un análisis, resulta que

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \mu_s \beta$$

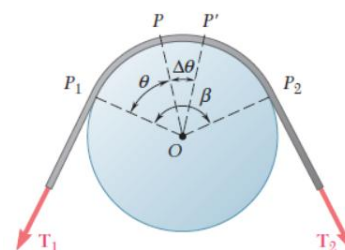


Figura 3. Fricción en bandas

O bien $T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}$, donde β representa el número de vueltas (radianes) en el tambor.

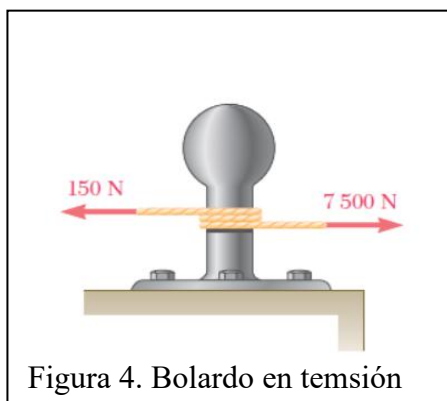


Figura 4. Bolardo en tensión

Ejemplo. Un cable de remolque lanzado desde un barco a un muelle se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo. La tensión en el cable es de $7500N$, que ejerce una fuerza de $150N$ sobre el extremo libre del cable, un trabajador en el muelle apenas puede evitar que el cable se deslice. Determine a) el coeficiente de fricción entre el cable y el bolardo, b) la tensión en el cable que podría ser resistida por la fuerza de $150N$ si el cable estuviera enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo.

a) Condiciones iniciales:

$$T_1 = 150N; T_2 = 7500N; \beta = 2(2\pi)$$

$$\mu_s = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 0.311$$

b) Condiciones iniciales:

$$T_1 = 150N; \beta = 3(2\pi)$$

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta} = 52,725N$$

Funciones Trigonómicas

Introducción

Las funciones trigonométricas se pueden usar también para resolver triángulos oblicuos, es decir, triángulos sin ángulos rectos. Para hacer esto, se estudia primero la ley de los senos y luego la ley de los cosenos a continuación. Para expresar estas leyes (o fórmulas) con más facilidad, se sigue la convención de marcar los ángulos de un triángulo como A, B, C y las longitudes de los lados opuestos correspondientes como a, b, c, como en la figura 1.

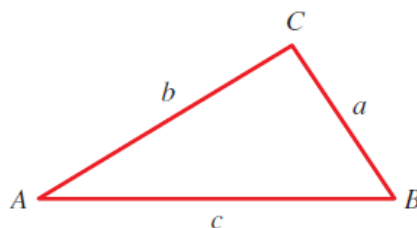


Figura 1

Para resolver el triángulo, es necesario conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para decidir si se tiene información suficiente, con frecuencia es útil hacer un bosquejo. Por ejemplo, si se dan dos ángulos y el lado incluido, entonces es claro que sólo se puede formar un solo triángulo (véase la figura 2a)). De manera similar, si se conocen dos lados y el ángulo incluido, entonces está determinado un solo triángulo (figura 2c)). Pero si se conocen los tres ángulos y ninguno de los lados, no se puede determinar de manera única el triángulo porque muchos triángulos tienen los mismos tres ángulos. (Por supuesto todos estos triángulos serían similares.) Así que no se considerará este último caso.

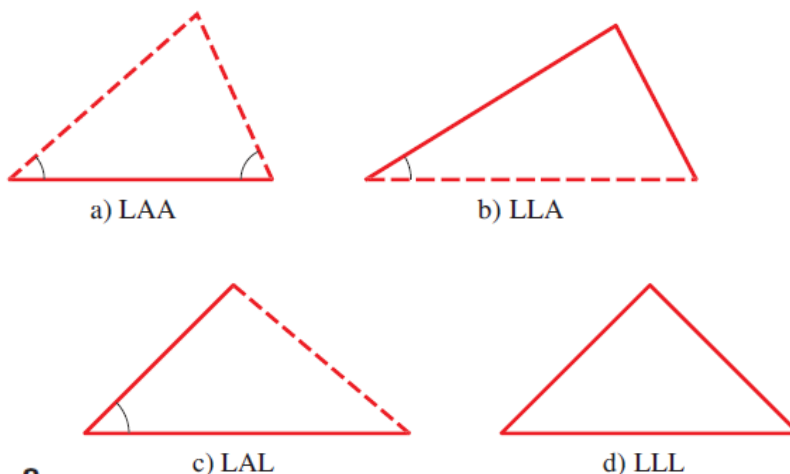


Figura 2

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) siempre que por lo menos una de estas tres partes sea un lado. Así, las posibilidades, ilustradas en la figura 2, son como sigue.

Caso 1 Un lado y dos ángulos (LAA)

Caso 2 Dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados (LLA)

Caso 3 Dos lados y el ángulo incluido (LAL)

Caso 4 Tres lados (LLL)

Los casos 1 y 2 se resuelven por medio de la ley de los senos; los casos 3 y 4 requieren la ley de los cosenos.

Ley de los senos

La **ley de los senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

Ley de los senos

En el triángulo ABC se tiene

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Demostración. Para ver por qué es cierta la ley de los senos, refiérase a la figura 3. Es conocido que la fórmula para el área de un triángulo ABC es $\left(\frac{1}{2}\right)ab \sin C$.

Por la misma fórmula el área de este triángulo es también $\left(\frac{1}{2}\right)ac \sin B$ y $\left(\frac{1}{2}\right)bc \sin A$. Así,

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

Al multiplicar por $\frac{2}{abc}$ se obtiene la ley de los senos.

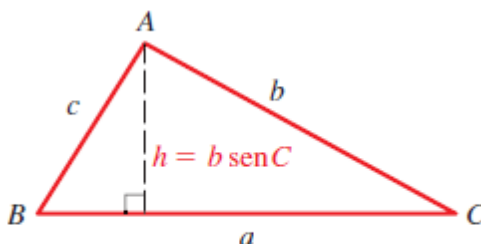


Figura 3

Ejemplo 1 Rastreo de un satélite (LAA)

Un satélite que orbita la Tierra pasa directamente arriba de las estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, apartadas 340 millas. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, su ángulo de elevación es observado de manera simultánea como 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿Qué tan lejos está el satélite de Los Ángeles? En otras palabras, encuentre la distancia AC en la figura 4.

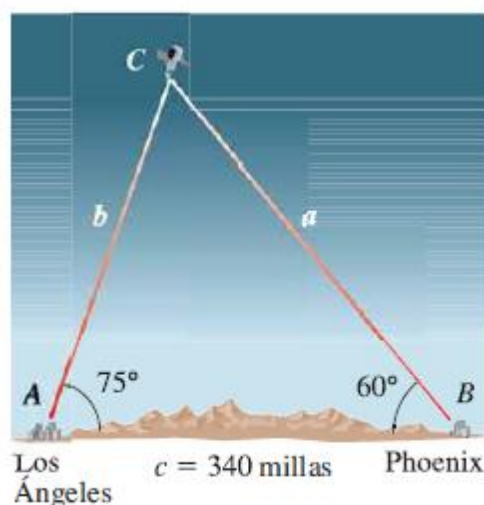


Figura 4

Solución Siempre que dos ángulos en un triángulo se conocen, el tercer ángulo se puede determinar de inmediato porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180° . En este caso, $\angle C = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$ (véase la figura 4), por lo tanto se tiene

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \frac{\sin B}{b} =$$

Ley de los senos

$$\frac{\sin 60^\circ}{b} = \frac{\sin 45^\circ}{340}$$

Sustituya

$$b = \frac{340 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 416$$

Resuelva para b

La distancia del satélite desde Los Ángeles es aproximadamente 416 millas.

Ejemplo 2 Resolver un triángulo (LLA)

Resuelva el triángulo de la figura 5.

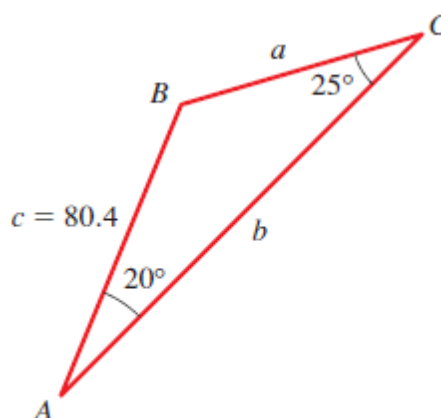


Figura 5

Solución Primero, $\angle B = 180^\circ - (20^\circ + 25^\circ) = 135^\circ$. Puesto que se conoce el lado c , para hallar el lado a se usa la relación

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{Ley de los senos}$$

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{80.4 \sin 20^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 65.1 \quad \text{Despeje } a$$

De manera similar, para encontrar b utilizamos

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{Ley de los senos}$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{80.4 \sin 135^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 134.5 \quad \text{Despeje } b \blacksquare$$

Ejemplo 3 LLA, caso sin solución

Resuelva el triángulo ABC , donde $\angle A = 42^\circ$, $a = 70$ y $b = 122$.

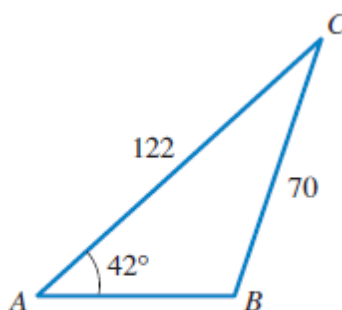


Figura 10

Solución Para organizar la información dada, se bosqueja el diagrama en la figura 10. Se intentará hallar. Se tiene

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \text{Ley de los senos}$$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{122 \sin 42^\circ}{70} \approx 1.17 \quad \text{Despeje } \sin B$$

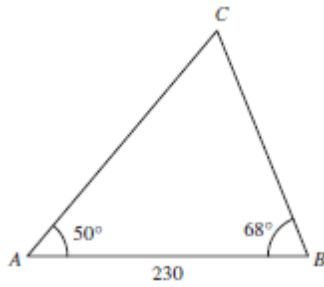
Puesto que el seno de un ángulo nunca es mayor que 1, se concluye que ningún triángulo satisface las condiciones dadas en este problema. $\blacksquare$

Ejercicios

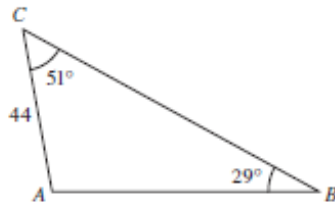
- Bosqueje cada triángulo que satisface las condiciones dadas y después resuélvalo por medio de la ley de los senos.
 - $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 68^\circ$, $c = 230$.
 - $\angle B = 29^\circ$, $\angle C = 51^\circ$, $b = 44$.
 - $a = 28$, $b = 15$, $\angle A = 110^\circ$.
 - $a = 20$, $c = 45$, $\angle A = 125^\circ$.

Respuestas.

- $\angle C = 62^\circ$, $a \approx 200$, $b \approx 242$.



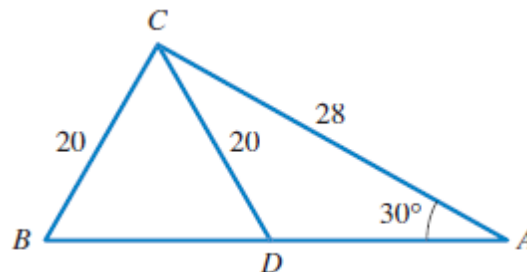
b) $\angle A = 100^\circ$, $a \approx 89$, $c \approx 71$.



- c) $\angle B \approx 30^\circ$, $\angle C \approx 40^\circ$, $c \approx 19$.
d) No hay solución.

2. Para el triángulo mostrado, hallar

- a) $\angle BCD$
b) $\angle DCA$



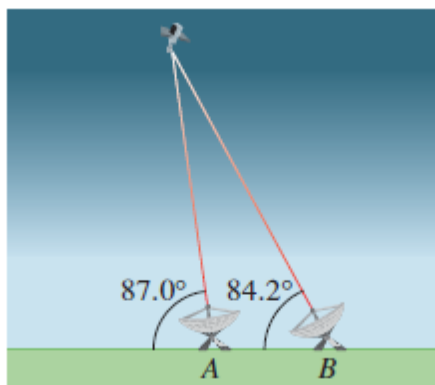
Respuestas. a) 91.146° b) 14.427°

3. Muestre que, dados los tres ángulos A, B, C de un triángulo y un lado, por ejemplo a , el área del triángulo es

$$\text{área} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

4. **Rastreo de un satélite** La trayectoria de un satélite que orbita la Tierra ocasiona que pase directamente sobre dos estaciones de rastreo A y B separadas 50 millas. Cuando el satélite está sobre una de las dos estaciones, los ángulos de elevación en A y B son 87.0° y 84.2° , respectivamente.

- a) ¿Qué tan lejos está el satélite de la estación A?
b) ¿A qué altura respecto del suelo está el satélite?



Respuestas. a) 1018 millas b) 1017 millas.

Ley de los cosenos

La ley de los senos no se puede usar de manera directa para resolver triángulos si se conocen dos lados y el ángulo entre ellos o si se conocen los tres lados. En estos dos casos, se aplica la **ley de los cosenos**.

Ley de los cosenos

En cualquier triángulo ABC (véase la figura 1), se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Demostración Para probar la ley de los cosenos, coloque el triángulo ABC de modo que $\angle A$ esté en el origen, como se muestra en la figura 2.

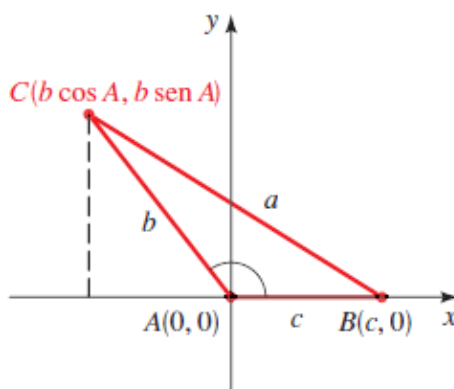


Figura 2

Las coordenadas de los vértices B y C son $(c, 0)$ y $(b \cos A, b \sin A)$, respectivamente. (Se debe comprobar que las coordenadas de estos puntos serán las mismas si se dibuja el ángulo A como un ángulo agudo.) Con la fórmula de la distancia, se obtiene

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A - 0)^2 = \\ &= (b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A = \\ &= (b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc \cos A + c^2 = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{Porque } \cos^2 A + \sin^2 A = 1 \end{aligned}$$

Esto demuestra la primera fórmula. Las otras dos formas se obtienen de la misma manera colocando cada uno de los otros vértices del triángulo en el origen y repitiendo el argumento anterior. ■

Ejemplo 1 Longitud de un túnel

Se construirá un túnel por una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo hace las mediciones mostradas en la figura 3. Use los datos del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

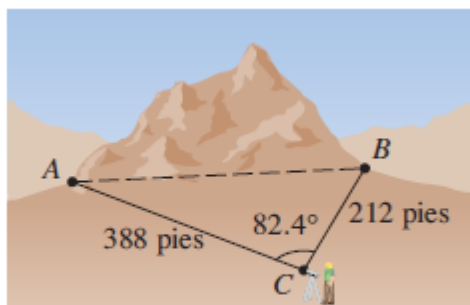


Figura 3

Solución Para aproximar la longitud c del túnel, se usa la ley de los cosenos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C = \\ &= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212) \cos 82.4^\circ = \\ &\approx 173730.2367 \end{aligned}$$

Así, el túnel medirá alrededor de 417 pies de largo. ■

Ejemplo 2 LLL, ley de los cosenos

Los lados de un triángulo son $a = 5$, $b = 8$ y $c = 12$ (véase la figura 4). Encuentre los ángulos del triángulo.

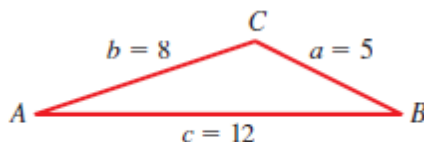


Figura 4

Solución Primero se encuentra $\angle A$. De la ley de los cosenos, se tiene $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Al despejar $\cos A$, se obtiene

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2(8)(12)} = \frac{183}{192} = 0.953125 \end{aligned}$$

Con una calculadora se encuentra que $\angle A \approx 18^\circ$. De la misma forma las Ecuaciones

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{5^2 + 12^2 - 8^2}{2(5)(12)} = \frac{7}{8} = 0.875 \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{5^2 + 8^2 - 12^2}{2(5)(8)} = -\frac{11}{16} = -0.6875\end{aligned}$$

dan $\angle B \approx 29^\circ$ y $\angle C \approx 133^\circ$. Por supuesto, una vez calculados dos ángulos, el tercero se encuentra con más facilidad a partir del hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° . Sin embargo, es una buena idea calcular los tres ángulos por medio de la ley de los cosenos y sumar los tres ángulos como una comprobación de sus cálculos. ■

Ejemplo 3 LAL, ley de los cosenos

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 46.5^\circ$, $b = 10.5$ y $c = 18.0$.

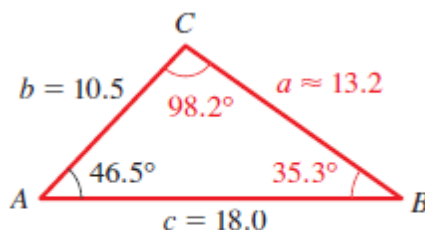


Figura 5

Solución Se puede encontrar a por medio de la ley de los cosenos

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = \\ &= (10.5)^2 + (18.0)^2 - 2(10.5)(18.0) \cos 46.5^\circ \approx 174.05\end{aligned}$$

Así, $a \approx \sqrt{174.05} \approx 13.2$. La ley de los cosenos se usa también para hallar $\angle B$ y $\angle C$, como en el ejemplo 2.

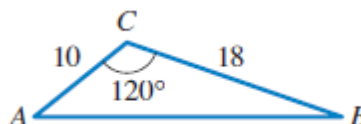
$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{(13.2)^2 + (18.0)^2 - (10.5)^2}{2(13.2)(18.0)} \approx 0.816477 \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(13.2)^2 + (10.5)^2 - (18.0)^2}{2(13.2)(10.5)} \approx -0.142532\end{aligned}$$

Con una calculadora se encuentra que $\angle B \approx 35.3^\circ$ y $\angle C \approx 98.2^\circ$. Para resumir: $\angle B \approx 35.3^\circ$, $\angle C \approx 98.2^\circ$ y $a \approx 13.2$. (Véase la figura 5.) ■

Ejercicios

1. Resuelva el triángulo ABC

a)



b) $a = 20, b = 25, c = 22$.

c) $a = 50, b = 65, \angle A = 55^\circ$

Respuestas. a) $\angle A \approx 39.4^\circ, \angle B \approx 20.6^\circ, c \approx 24.6$ b) $\angle A \approx 50^\circ, \angle B \approx 73^\circ, \angle C \approx 57^\circ$

c) No hay tal triángulo

2. Pruebe que en el triángulo ABC

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

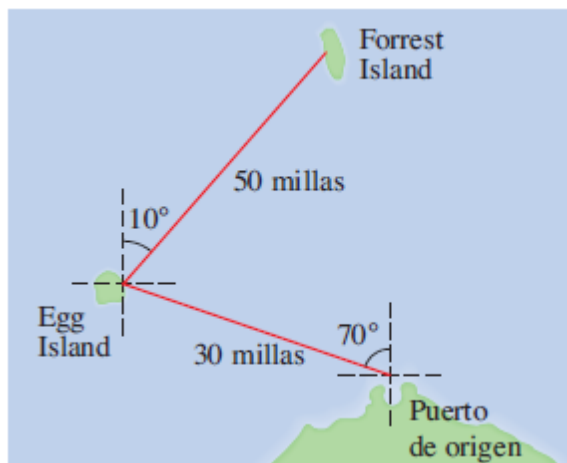
$$c = a \cos B + b \cos A$$

Estas se llaman *leyes de proyección*. [Sugerencia: para obtener la primera ecuación, sume las ecuaciones segunda y tercera en la ley de los cosenos y despeje a .]

3. Navegación Un pescador sale de su puerto de origen y se dirige en la dirección N 70° O. Viaja 30 minutos y llega a Egg Island. El siguiente día navega en dirección N 10° E durante 50 millas y llega a Forrest Island.

a) Encuentre la distancia entre el puerto de origen del pescador y Forrest Island.

b) Encuentre el rumbo desde Forrest Island de regreso a su puerto de origen.



Respuesta. a) 62.6 millas b) S 18.2° E

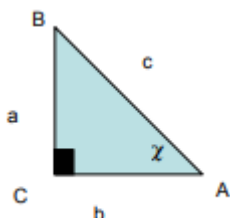


Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco

Identidades Trigonométricas

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y FÓRMULAS IMPORTANTES EN EL USO DEL CÁLCULO

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= \frac{a}{c} & \operatorname{csc}(x) &= \frac{c}{a} \\ \cos(x) &= \frac{b}{c} & \sec(x) &= \frac{c}{b} \\ \tan(x) &= \frac{a}{b} & \cot(x) &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

IDENTIDADES RECÍPROCAS

$$\operatorname{csc}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

IDENTIDADES DE COCIENTE

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

IDENTIDADES PARA NEGATIVOS

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \tan(-x) = -\tan(x)$$

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad 1 + \cot^2 x = \operatorname{csc}^2 x$$

IDENTIDADES DE SUMA

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) \pm \operatorname{sen}(y) \cos(x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$$



IDENTIDADES DE COFUNCIÓN

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot(\theta)$$

IDENTIDADES DE DOBLE ÁNGULO

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \cot x}{\cot^2(x) - 1}$$

$$\tan(2x) = \frac{2}{\cot(x) - \tan(x)}$$

IDENTIDADES DE MITAD DE ÁNGULO

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$





$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$$

Bibliografía

- Baldor, A. (2007). *Algebra*. México: Grupo Patria Cultural.
- Baldor, A. (2008). *Geometría y Trigonometría*. México: Patria.
- Dennis G. Zill, J. M. (2008). *Precálculo con avances al cálculo*. México: MacGraw-Hill.
- Leithold, L. (1989). *Matemáticas previas al cálculo. Análisis funcional y geometría analítica*. México: Harla.
- Stewart, J. (2012). *Precalculo. Matemáticas previas al cálculo*. México: Editorial Cengage Learning.
- Tromba, J. E. (2004). *Cálculo Vectorial*. España: Pearson, Addison Wesley.